Diese Summe stellen wir durch ein Integral dar, indem wir fordern, daß

$$\gamma \int_{1/N(n-1/2)}^{1/N(n+1/2)} \frac{\cos^2 \mu x}{a^2+x^2} \mathrm{d}x \approx \frac{1}{a^2+(n/N)^2} \tag{5}$$

werden soll. Daraus folgt die Bedingung

$$\mu = \pi N, \qquad \gamma = 2N \tag{6}$$

und die gesamte Summe geht über in

$$A \sum_{n=-N'}^{N''} \frac{1}{a^2+(n/N)^2} \approx A\, 2N \int_{-\xi'}^{\xi''} \frac{\cos^2 \pi N x}{a^2+x^2} \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Die Grenzen $-N'$ und N'' bzw. in der Kontinuumsdarstellung $-\xi'$ und ξ'' werden bedingt durch die Anzahl der möglichen n-Werte, welche auf Grund der endlichen Breite des Energiebandes der akustischen Schwingungen, und der noch bestehenden $\varkappa$-Auswahlregel zugelassen sind. Diese Grenzen sind im allgemeinen Fall kleiner als $(-N, N)$, d. h. n kann nicht sämtliche Energiewerte des akustischen Bandes durchlaufen. Immerhin überdeckt der Bereich $(-N', N'')$ bzw. $(-\xi', \xi'')$ noch den größten Teil des akustischen Bandes und seine Ausdehnung hängt noch von der Ausgangsschwingung $\varkappa$ ab. Wir können hierauf nicht näher eingehen.

Aus (7) entsteht nun durch trigonometrische Auflösung des Zählers im Integranden

$$A N \left\{ \frac{1}{a} \left[\operatorname{arctg} \frac{\xi''}{a} - \operatorname{arctg} \frac{-\xi'}{a} \right] + \int_{-\xi'}^{\xi''} \frac{\cos^2 2\pi N x}{a^2+x^2} \mathrm{d}x \right\}. \tag{8}$$

Da a in den meisten Fällen, wie man durch eine grobe Abschätzung erkennt – siehe Gl. (2), man nimmt an $\mathfrak{W}_\varkappa \leqq 10^{10}$, und beachtet (78) –, kleiner als 10^{-4} ist, dagegen wegen $x = n/N$, ξ' und ξ'' sich in der Größenordnung von 1 bewegen (die endliche Breite der erlaubten Werte!), wird

$$\operatorname{arctg} \frac{\xi''}{a} \approx \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{arctg} \frac{-\xi'}{a} \approx -\frac{\pi}{2}, \tag{9}$$

und wenn man ferner beim letzten schnell oszillierenden und konvergierenden Integral noch die Grenzen näherungsweise durch $(-\infty, +\infty)$ ersetzt, so erhält man

$$\frac{\pi}{a} A N [1 + e^{-2\pi N a}]. \tag{10}$$

Durch Einsetzen der Definition (1) und (2) kommt man aber auf die Formel (81), was zu beweisen war.

Herrn Prof. Dr. E. Fues danke ich für die Durchsicht des ersten Entwurfs, und Herrn M. Wagner für viele kritische Bemerkungen während der weiteren Ausarbeitung.

Zur Frage der Dispersionsbeziehungen für Reaktionen mit veränderlicher Teilchenzahl

Von A. A. Logunow, A. N. Tawchelidse und N. A. Tschernikow

Aus dem Vereinigten Institut für Kernforschung, Dubna (USSR), Laboratorium für Theoretische Physik

(Z. Naturforschg. **13 a**, 622—644 [1958]; eingegangen am 17. April 1958)

Es werden Dispersionsbeziehungen für den doppelten Compton-Effekt an Nukleonen $(p+\gamma \rightarrow p+2\gamma)$ angegeben und mögliche Fälle aufgezeigt, für die die Dispersionsbeziehungen kein nichtbeobachtbares Energiegebiet enthalten.

In der Arbeit [1] wurden Dispersionsbeziehungen für Reaktionen mit veränderlicher Teilchenzahl erhalten. Die analytischen Eigenschaften der Amplitude wurden in den Arbeiten [2, 3] betrachtet. In der vorliegenden Bemerkung wird im Anschluß an [1, 2, 3] für die Reaktion des doppelten Compton-Effektes eine Erweiterung der möglichen Fälle vorgenommen, für die die Dispersionsbeziehungen kein nichtbeobachtbares Energiegebiet enthalten (analog der Vorwärtsstreuung für Meson-Nukleon-Stöße).

[1] A. A. Logunow, Dokl. Akad. Nauk, USSR (im Druck).
[2] A. A Logunow u. A. N. Tawchelidse, Dokl. Akad. Nauk, USSR (im Druck).
[3] A. A. Logunow u. A. N. Tawchelidse, Nucl. Phys. (im Druck).

§ 1. Die Kinematik des Prozesses

Wir kennzeichnen die Impulse des Anfangs- und Endzustandes der Nukleonen durch p und p'. Entsprechend sind q und q', q'' die Impulse der Photonen im Anfangs- und Endzustand. Die Erhaltungssätze für Energie und Impuls haben die Form

$$p + q = p' + q' + q''. \tag{1.1}$$

Bei den weiteren Betrachtungen werden wir ein Bezugssystem benutzen, in dem

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = 0. \tag{1.2}$$

An Stelle der Vektoren q', q'' führen wir die Vektoren Q, Δ ein:

$$Q = \tfrac{1}{2}(q' + q''), \qquad \Delta = \tfrac{1}{2}(q' - q'') . \tag{1.3}$$

Es ist leicht zu sehen, daß Q ein zeitartiger Vektor ist.

Fixiert man das vierdimensionale Quadrat des Vektors Q

$$Q^2 = m_Q{}^2 , \tag{1.4}$$

so nehmen die Erhaltungssätze für Energie-Impuls (1.1) in dem von uns gewählten Bezugssystem die folgende Form an

$$\mathfrak{q} - 2\,\mathfrak{Q} = -2\,\mathfrak{p} , \qquad (\mathfrak{q} - 2\,\mathfrak{Q})\,(\mathfrak{q} + 2\,\mathfrak{Q}) = 4\,m_Q{}^2. \tag{1.5}$$

Nach elementaren Rechnungen findet man hieraus

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} &= \lambda\,\mathfrak{e} - (1+\varepsilon)\,\mathfrak{p} + t\,\mathfrak{n} , \\ 2\,\mathfrak{Q} &= \lambda\,\mathfrak{e} + (1-\varepsilon)\,\mathfrak{p} + t\,\mathfrak{n} , \end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}/|\,\mathfrak{p}\,|$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren sind (der Vektor $\mathfrak{n}$ soll in der $(\mathfrak{p}, \Delta)$-Ebene liegen sowie

$$\varepsilon = m_Q{}^2/\mathfrak{p}^2 , \quad \lambda^2 = 4\,E^2 - (1+\varepsilon)^2\,\mathfrak{p}^2 - t^2 . \tag{1.7}$$

Durch E kennzeichnen wir hierbei die energetische Komponente des Vektors Q. Berücksichtigt man (1.3) und (1.4), so findet man

$$\Delta^2 = -m_Q{}^2, \qquad Q\,\Delta = 0 . \tag{1.8}$$

Wenn die Energie der erzeugten Photonen gleich ist, so sind die Größen $\mathfrak{p}$, $\vec{\Delta}$, t und E voneinander unabhängig. Mit Hilfe von (1.6) und (1.8) erhält man

$$t = \frac{m_Q{}^2 - \mathfrak{p}^2}{|\,\mathfrak{p}\,|}\,\mathrm{ctg}\,(\widehat{\mathfrak{p}\,\vec{\Delta}}) \tag{1.9}$$

Infolgedessen ist die Amplitude des Prozesses in dem von uns gewählten Bezugssystem eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen E, $\mathfrak{p}$, $\vec{\Delta}$.

§ 2. Die Dispersionsbeziehungen

Benutzt man die Translationsinvarianz der Matrixelemente sowie die Annahme, daß der Energie-Impuls-Operator ein vollständiges System von Zustandsvektoren besitzt, so kann man den antihermiteschen Teil der Amplitude des Prozesses $\mathrm{p} + \gamma \to \mathrm{p} + 2\,\gamma$ in der folgenden Form (2.1) darstellen[1, 3]:

$$\left.\begin{aligned} A_{\alpha,\omega}(q, q', q'') = \pi \sum \Big\{ & V_{q'}(\mathrm{n}, \mathrm{p}')\, D_{q,q''}(\mathrm{p}, \mathrm{n}) \Big(\delta\, p_0{}' + q_0{}' - \sqrt{M_n{}^2 + (\vec{\mathfrak{p}}' + \vec{\mathfrak{q}}')^2}\Big) \\ & - \delta\Big(p_0 - q_0{}' - \sqrt{M_n{}^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{q}')^2}\Big)\, D_{q,q''}(\mathrm{n}, \mathrm{p}')\, V_{q'}(\mathrm{p}, \mathrm{n}) \\ & + \delta\Big(p_0{}' + q_0{}'' - \sqrt{M_n{}^2 + (\mathfrak{p}' + \mathfrak{q}'')^2}\Big)\, V_{q''}(\mathrm{n}, \mathrm{p}')\, D_{q,q'}(\mathrm{p}, \mathrm{n}) \\ & - \delta\Big(p_0 - q_0{}'' - \sqrt{M_n{}^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{q}'')^2}\Big) D_{q,q'}(\mathrm{n}, \mathrm{p}')\, V_{q''}(\mathrm{p}, \mathrm{n}) \\ & + \delta\Big(p_0 + q_0 - \sqrt{M_n{}^2 + (\mathfrak{p} + \mathfrak{q})^2}\Big)\, D_{-q',q''}(\mathrm{n}, \mathrm{p}')\, V_q(\mathrm{p}, \mathrm{n}) \\ & - \delta\Big(p_0{}' - q_0 - \sqrt{M_n{}^2 + (\mathfrak{p}' - \mathfrak{q})^2}\Big)\, V_q(\mathrm{n}, \mathrm{p}')\, D_{-q',q''}(\mathrm{p}, \mathrm{n}) \Big\} . \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Die Untersuchung der δ-Funktionen dieses Ausdruckes zeigt, daß unter den Bedingungen

$$m_Q{}^2 < \tfrac{1}{4}\,(M\,\mu + \tfrac{1}{2}\mu^2), \quad \mathfrak{p}^2 < \tfrac{1}{4}\,(M\,\mu + \tfrac{1}{2}\mu^2) \tag{2.2}$$

das Energiespektrum des antihermiteschen Teils der Amplitude das in Abb. 1 gezeigte Verhalten besitzt. Dabei gilt

$$\begin{aligned} 2\,P_0\,E_c &= M\,\mu + \tfrac{1}{2}\mu^2 - \mathfrak{p}^2 - m_Q{}^2 ; \\ 2\,P_0\,E_\alpha &= \mathfrak{p}^2 + m_Q{}^2 ; \\ 2\,P_0\,E_\beta &= m_Q{}^2 - \mathfrak{p}^2 + 2\,\mathfrak{p}\,\vec{\Delta} ; \\ 2\,P_0\,E_\gamma &= m_Q{}^2 - \mathfrak{p}^2 - 2\,\mathfrak{p}\,\vec{\Delta} . \end{aligned} \tag{2.3}$$

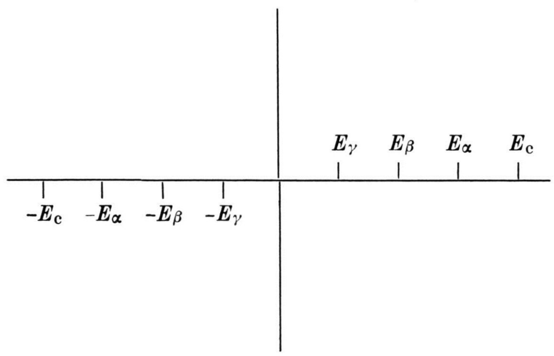

Abb. 1.

(Bei der in Abb. 1 erhaltenen Lage der Pole wurde $(\mathfrak{p}\,\vec{\Delta}) > 0$ und $E_\gamma > 0$ angenommen.)

Das beobachtbare Energiegebiet (Schwellenwert für die Reaktion) beginnt bei

$$E_p{}^2 = \tfrac{1}{4}\,\frac{(\mathfrak{p}^2+m_Q{}^2)^2}{\mathfrak{p}^2} + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{ctg}^2(\widehat{\mathfrak{p}\,\vec{\Delta}})\,\frac{(\mathfrak{p}^2-m_Q{}^2)^2}{\mathfrak{p}^2}\,. \tag{2.4}$$

In den Dispersionsbeziehungen ist kein nichtbeobachtbares Gebiet vorhanden, wenn das kontinuierliche Spektrum oberhalb des Schwellenwertes der Energie beginnt

$$E_c \geq E_p\,. \tag{2.5}$$

Diese Bedingung kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$\begin{aligned}&\mathfrak{p}^4(M+\mu)^2 + \mathfrak{p}^2[2\,m_Q{}^2(M+\tfrac{1}{2}\mu)^2 - \mu^2(M+\tfrac{1}{2}\mu)^2 + \tfrac{1}{2}\mu^2\,m_Q{}^2]\\ &\quad + m_Q{}^4\,M^2 + \mathrm{ctg}^2(\widehat{\vec{\Delta}\,\mathfrak{p}})\,(m_Q{}^2-\mathfrak{p}^2)^2(\mathfrak{p}^2+M^2) \leqq 0\,.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Man kann leicht sehen, daß es für

$$m_Q{}^2 \leqq \tfrac{1}{4}\mu^2 \tag{2.7}$$

immer mögliche Werte der Größen $\mathfrak{p}^2$ und $(\vec{\Delta}\,\mathfrak{p})$ gibt, für die die Ungleichung (2.6) erfüllt werden kann. Für $m_Q{}^2 = \frac{1}{4}\mu^2$ und orthogonale Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\vec{\Delta}$ existiert ein einziger Wert des Impulses

$$\bar{\mathfrak{p}}_c{}^2 = \tfrac{1}{4}\mu^2\,\frac{M}{M+\mu}\,, \tag{2.8}$$

der der Beziehung (2.6) genügt. Falls $m_Q{}^2 < \frac{1}{4}\mu^2$, gibt es einen gewissen Wertebereich $\mathfrak{p}^2$ der Größen $\mathfrak{p}^2$ und $(\vec{\Delta}\,\mathfrak{p})$, innerhalb dessen die Ungleichung (2.6) erfüllt werden kann.

Mit Hilfe von (2.1) kann man leicht den Beitrag des Dispersionsintegrales für das Gebiet $|E| < E_c$ berechnen:

$$\begin{aligned}1/\pi \int_{-E_c}^{E_c} \mathrm{d}E' \left(\frac{E-E_0}{E'-E_0}\right)^{n+1} \frac{S_\pm\,A_{\alpha,\omega}(E')}{(E'-E)} &= \sum_{i=\alpha,\beta,\gamma}\left[\left(\frac{E_0-E}{E_0-E_i}\right)^{n+1}\frac{S_\pm\,R_i(\mathfrak{p},\vec{\Delta},\mathfrak{e})}{(E_i-E)}\right.\\ &\quad \left. + \left(\frac{E_0-E}{E_0+E_i}\right)^{n+1}\frac{S_\pm\,\Omega_i(\mathfrak{p},\vec{\Delta},\mathfrak{e})}{(E_i+E)}\right],\end{aligned} \tag{2.9}$$

wobei

$$\begin{aligned}R_\alpha &= -\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{2E_\alpha}{p_0}\right)V_q(\mathrm{p}'',\mathrm{p}')\,D_{-q',q''}(\mathrm{p},\mathrm{p}''),\\ R_\beta &= \left(1+\frac{E_\beta}{p_0}\right)V_{q''}(\mathrm{p}'',\mathrm{p}')\,D_{q,q'}(\mathrm{p},\mathrm{p}''),\\ R_\gamma &= \left(1+\frac{E_\gamma}{p_0}\right)V_{q'}(\mathrm{p}'',\mathrm{p}')\,D_{q,q''}(\mathrm{p},\mathrm{p}'');\\ \Omega_\alpha &= -\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{2E_\alpha}{p_0}\right)D_{-q',q''}(\mathrm{p}'',\mathrm{p}')\,V_q(\mathrm{p},\mathrm{p}''),\\ \Omega_\beta &= \left(1+\frac{E_\beta}{p_0}\right)D_{q,q'}(\mathrm{p}'',\mathrm{p}')V_{q''}(\mathrm{p},\mathrm{p}''),\\ \Omega_\gamma &= \left(1+\frac{E_\gamma}{p_0}\right)D_{q,q''}(\mathrm{p}'',\mathrm{p}')\,V_{q'}(\mathrm{p},\mathrm{p}'').\end{aligned} \tag{2.10}$$

$S_\pm$ ist der Operator der Symmetrisierung bzw. Antisymmetrisierung bezüglich $\mathfrak{e}$.

Benutzt man (2.9) sowie die analytischen Eigenschaften der Amplitude des doppelten Compton-Effektes, so kann man die folgenden Dispersionsbeziehungen erhalten

$$\begin{aligned}S_\pm\,D_{\alpha,\omega}(E) &= \frac{(E-E_0)^{n+1}}{\pi}\,p\int_{|E'|\geqq E_c}^{\infty}\mathrm{d}E'\,\frac{S_\pm\,A_{\alpha,\omega}(E')}{(E'-E)\,(E'-E_0)^{n+1}}\\ &\quad + \sum_{i=\alpha,\beta,\gamma}\left[\left(\frac{E_0-E}{E_0+E_i}\right)^{n+1}\frac{S_\pm\,R_i(\mathfrak{p},\Delta,\mathfrak{e})}{(E_i-E)} + \left(\frac{E_0-E}{E_0+E_i}\right)^{n+1}\frac{S_\pm\,\Omega_i(\mathfrak{p},\vec{\Delta},\mathfrak{e})}{(E_i+E)}\right] + P_n(E)\,.\end{aligned} \tag{2.11}$$

$P_n(E)$ ist ein Polynom n-ten Grades in E. Der Grad des Polynoms wird durch das Verhalten der Amplitude des Prozesses für hohe Energien $(E \to \infty)$ bestimmt.

Das negative Energiegebiet in den Dispersionsbeziehungen (2.11) kann mit Hilfe der folgenden Symmetrieeigenschaft des antihermiteschen Teils der Amplitude beseitigt werden:

$$A_{\alpha,\omega}(E) = -P_{ss'}\,A^*_{\alpha\omega}(-E)\,; \tag{2.12}$$

$P_{ss'}$ ist der Vertauschungsoperator für die Spin-Zustände des Nukleons.

Die Autoren möchten Akademiemitglied Prof. N. N. Bogoljubow ihre tiefe Dankbarkeit für wertvolle Erörterungen und das ständige Interesse an ihrer Arbeit zum Ausdruck bringen.